Функция называется *выпуклой* (*вниз*), если её надграфик – выпуклое множество. Иными словами, функция $f$ называется выпуклой на промежутке $(a,b)$, если для любых двух точек $x_1,x_2 \in (a,b)$ и чисел $m_1,m_2 > 0$ верно неравенство $\frac{m_1 f(x_1)+m_2 f(x_2)}{m_1+m_2} \geqslant f(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2})$. Аналогично, функция *выпукла вверх*, если её подграфик – выпуклое множества.

**1.** Докажите, что, если функция $f$ дважды дифференцируема на интервале $(a,b)$ и во всех точках интервала выполнено неравенство $f''(x) \geqslant 0$, то она выпукла на $(a,b)$.

**2.** Функция $f$ дважды дифференцируема и выпукла на интервале $(a,b)$. Верно ли, что во всех точках этого интервала выполнено неравенство $f''(x) \geqslant 0$?

**3. Неравенство Йенсена.** Функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ выпукла на интервале $(a,b)$. Докажите, что для любых наборов чисел $x_1,\ldots,x_n \in (a,b)$ и коэффициентов $m_1,\ldots,m_n \in (0,+\infty)$ верно неравенство $\frac{m_1f(x_1)+\ldots+m_nf(x_n)}{m_1+\ldots+m_n} \geqslant f\left(\frac{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n}\right)$.

Набор чисел $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ *мажорирует* набор чисел $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ ($\{x_i\} \succ \{y_i\}$), если $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ и при всех $1 \leqslant k \leqslant n-1$ верны неравенства $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} y_i$.

**4. Неравенство Караматы.** Функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ выпукла на интервале $(a,b)$. Докажите, что для любых двух наборов $\{x_i\} \succ \{y_i\}$ точек интервала $(a,b)$ верно неравенство $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n) \geqslant f(y_1)+f(y_2)+\ldots+f(y_n)$.

**5. Неравенство Караматы.** Функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ выпукла на интервале $(a,b)$. Наборы точек $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ интервала $(a,b)$ и набор коэффициентов $m_1,\ldots,m_n \in (0,+\infty)$ таковы, что $\{m_ix_i\} \succ \{m_iy_i\}$. Докажите неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n} m_if(x_i) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} m_if(y_i)$.

**6.** Докажите, что для любых чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_{>0}$ верно неравенство $\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{b_1+\ldots+b_n}\right)^{a_1+\ldots+a_n} \leqslant \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{a_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{a_n}$.

**7. Неравенство Юнга.** Пусть $a, b, p, q \in \mathbb{R}_{>0}$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите неравенство $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab$.

**8. Неравенство Гёльдера.** Пусть $p, q \in \mathbb{R}_{>0}$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что для любых чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_{>0}$ верно неравенство

$$(a_1^p + \ldots + a_n^p)^{1/p} \cdot (b_1^q + \ldots + b_n^q)^{1/q} \geqslant a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

**9.** Числа $a$, $b$ и $c$ выражают длины сторон некоторого треугольника. Докажите неравенство

$$\left(1 + \tfrac{b-c}{a}\right)^a \cdot \left(1 + \tfrac{c-a}{b}\right)^b \cdot \left(1 + \tfrac{a-b}{c}\right)^c \leqslant 1.$$

**10.** Вещественные числа $a, b, c, d$ таковы, что $a > b > c > d > 0$ и $a + b + c + d = 1$. Докажите неравенство

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

**11.** Докажите, что для любых вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n$ и $r \in [0, 1]$ верно неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i + x_j|^r \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|^r.$$